BYRAY

UNIVERSITE MOHAMMED V AGDAL
FACULTE DES SCIENCES –RABAT-

Année universitaire 2013 / 2014
SMPC1 - Module de Physique 1

Contrôle final de Thermodynamique (1h 30 mn)

Question de cours (5 pts)

1°) A partir de la définition de l'enthalpie : $H = U + PV$, montrer que la relation de Rober-Mayer, pour une mole de gaz parfait, s'écrit sous la forme : $C_p - C_v = R$

R : constante universelle des gaz parfait, C_P et C_v sont respectivement les capacités thermiques à pression et volume constants.

2°) Ecrire la relation de Mayer pour n moles.

3°) Sachant que $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ et en utilisant la relation de Mayer, déterminer les expressions de C_p et C_v en fonction de R, de γ et du nombre de mole n.

Exercice (15 pts)

On fait décrire à une mole d'un gaz parfait diatomique le cycle Diesel constitué des transformations réversibles suivantes :

- $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique ;
- $2 \rightarrow 3$: chauffage isobare ;
- $3 \rightarrow 4$: détente adiabatique ;
- $4 \rightarrow 1$: refroidissement isochore.

On donne : $\gamma = \frac{C_P}{C_v} = 1,4$; les rapports volumétriques des transformations adiabatiques :

$a = \frac{V_1}{V_2} = 9$ et $b = \frac{V_4}{V_3} = 3$; $R = 8,32\ J.mol^{-1}.K^{-1}$; $P_1 = 10^5\ Pa$; $T_1 = 300\ K$.

1°) Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron (P, V). Justifier que le cycle est moteur.

2°) Calculer le volume V_1 du gaz à l'état 1.

3°) Déterminer les expressions de P_2, P_3 et P_4 en fonction de a , b, γ et P_1. Calculer leurs valeurs

4°) Déterminer les expressions de V_2, V_3 et V_4 en fonction de a , b, γ et V_1. Calculer leurs valeurs

5°) Déterminer et calculer les quantités de chaleur échangées au cours des différentes transformations.

6°) Déterminer et calculer les travaux misent en jeu le long du cycle. Déduire la variation de l'énergie interne sur tout le cycle.

7°) Déterminer les expressions de la variation d'entropie pour chaque transformation. Calculer leurs valeurs et vérifier que la variation d'entropie sur tout le cycle est nulle.

8°) Le cycle Diesel reçoit une quantité de chaleur Q_c durant la transformation $2 \rightarrow 3$ et rejette une quantité de chaleur Q_a durant la transformation $4 \rightarrow 1$. Etablir l'expression du rendement thermique du moteur en fonction de Q_c et Q_a. Calculer sa valeur.

9°) Montrer que l'expression du rendement thermique s'écrit en fonction de a, b et γ sous la forme :

$$\eta = 1 - \frac{1}{\gamma}\frac{b^{-\gamma} - a^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

FSR. Contrôle finale de thermodynamique 2013/2014 by RAY www.facebook.com/allouustdtp

Question de Cours

1°) $H = U + PV$

$dH = dU + d(PV)$

avec

$$dH = C_p dT$$
$$dU = C_v dT$$

$d(PV) = R\,dT \quad (n=1)$

$\Rightarrow C_p dT = C_v dT + R\,dT$

$\Rightarrow C_p = C_v + R$

d'où $$C_p - C_v = R$$

2°) pour n moles

$dH = dU + d(PV)$

$C_p dT = C_v dT + nR\,dT$

$C_p = C_v + nR$

$$\Rightarrow C_p - C_v = nR$$

3°) $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{nR + C_v}{C_v}$

$\Rightarrow C_v \gamma = nR + C_v$

$\Rightarrow C_v(\gamma - 1) = nR$

$$C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$$

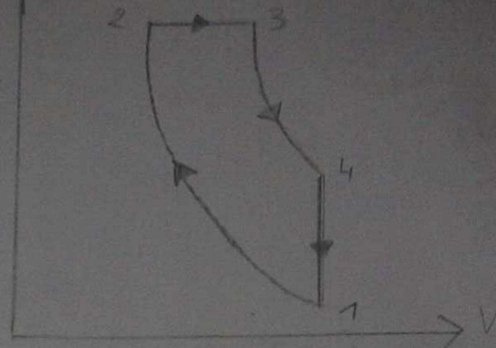
$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \Rightarrow C_p = \gamma . C_v$

$$\Rightarrow C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

Like : www.facebook.com/allouustdtp

Exercice

1)



* le cycle est moteur car le parcours est effectué dans le sens horaire

2) $P_1 V_1 = nRT_1$

$$V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} \quad (n=1)$$

$V_1 = \frac{8,32 \times 300}{10^5}$

$V_1 = 0,025\ m^3$

$$V_1 = 25\ l$$

3) $P_2 V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma$

$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = P_1 a^\gamma$

$$P_2 = P_1 a^\gamma$$

$P_3 = P_2 \Rightarrow$ $$P_3 = P_1 a^\gamma$$

$P_4 V_4^\gamma = P_3 V_3^\gamma = P_1 a^\gamma . V_3^\gamma$

$\Rightarrow P_4 = P_1 a^\gamma \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^\gamma$

$$P_4 = P_1 \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma$$

4)

$$V_2 = \frac{V_1}{a}$$

$$V_3 = \frac{V_4}{b} = \frac{V_1}{b}$$

$$V_3 = \frac{V_1}{b}$$

$$V_4 = V_1$$

5)

$$Q_{12} = 0$$

$$Q_{23} = \int C_p \, dT = C_p (T_3 - T_2)$$

$$= C_p \left(\frac{P_3 V_3}{R} - \frac{P_2 V_2}{R} \right)$$

$$= \frac{C_p P_2}{R} (V_3 - V_2)$$

$$= \frac{C_p P_2}{R} \left(\frac{V_1}{b} - \frac{V_1}{a} \right)$$

$$= \frac{C_p P_2}{R} V_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$= \frac{C_p P_1 a^\gamma V_1}{R} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$= C_p a^\gamma T_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$Q_{23} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} a^\gamma T_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

$$Q_{23} = 42{,}08 \text{ KJ}$$

$$Q_{34} = 0$$

$$Q_{41} = \int C_v \, dT = C_v (T_1 - T_4)$$

$$= C_v \left(\frac{P_1 V_1}{R} - \frac{P_4 V_4}{R} \right)$$

$$= \frac{C_v V_1}{R} (P_1 - P_4)$$

$$= \frac{C_v V_1}{R} P_1 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^\gamma \right)$$

$$= T_1 . C_v \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^\gamma \right)$$

$$Q_{41} = \frac{R}{\gamma - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^\gamma \right)$$

$$Q_{41} = -22{,}81 \text{ KJ}$$

6)

$$W_{12} = -\int_1^2 P \, dV = -P_1 V_1^\gamma \int_1^2 \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$= -P_1 V_1^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_{V_1}^{V_2}$$

$$= -P_1 V_1^\gamma \left(\frac{V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right)$$

$$= \frac{P_1 V_1 - P_2 V_2}{1-\gamma} = \frac{P_1 V_1 - P_1 a^\gamma . \frac{V_1}{a}}{1-\gamma}$$

$$W_{12} = \frac{P_1 V_1}{1-\gamma} \left(1 - a^{\gamma-1} \right)$$

$$W_{12} = 8{,}79 \text{ KJ}$$

$$W_{23} = -\int_2^3 P \, dV = -P_2 \int_2^3 dV$$

$$= -P_1 a^\gamma (V_3 - V_2)$$

$$= P_1 a^\gamma (V_2 - V_3) = P_1 a^\gamma \left(\frac{V_1}{a} - \frac{V_1}{b} \right)$$

$$= P_1 a^\gamma V_1 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$W_{23} = R T_1 a^\gamma \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

$$W_{23} = -12{,}02 \text{ KJ}$$

$$W_{34} = -\int_3^4 P\,dV = -P_3V_3^\gamma \int_3^4 \frac{dV}{V^\gamma}$$

$$= P_3V_3^\gamma \frac{V_3^{1-\gamma} - V_4^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

$$= \frac{P_3V_3 - P_4V_4}{1-\gamma}$$

$$= \frac{P_1 a^\gamma V_1/b - P_1\left(\frac{a}{b}\right)^\gamma \cdot V_1}{1-\gamma}$$

$$= \frac{P_1V_1}{1-\gamma}\left(\frac{a^\gamma}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma\right)$$

$$W_{34} = \frac{RT_1}{1-\gamma} \cdot a^\gamma \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b^\gamma}\right)$$

$$W_{34} = -16{,}03\ kJ$$

$$W_{41} = 0$$

$$* \Delta U_{cycle} = Q_{cycle} + W_{cycle}$$

$$= (42{,}08 - 22{,}81) + (8{,}79 - 12{,}02 - 16{,}03)$$

$$= 0$$

$$\Delta U_{cycle} = 0$$

7) $\Delta S_{12} = \int \frac{\delta Q}{T} = 0$

$$\Delta S_{12} = 0$$

$$\Delta S_{23} = \int \frac{\delta Q}{T} = C_p \int \frac{dT}{T}$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\left[\ln T\right]_{T_2}^{T_3}$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{T_3}{T_2}$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{P_3V_3/R}{P_2V_2/R} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{V_3}{V_2}$$

$$= \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \frac{V_1/b}{V_1/a}$$

$$\Delta S_{23} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \left|\frac{a}{b}\right|$$

$$\Delta S_{23} = 32\ J$$

$$\Delta S_{34} = 0$$

$$\Delta S_{41} = \int \frac{\delta Q}{T} = C_V \int \frac{dT}{T}$$

$$= \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_4} = \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{P_1V_1/R}{P_4 V_4/R}$$

$$= \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{P_1}{P_4} = \frac{R}{\gamma-1} \ln \frac{P_1}{P_1\left(\frac{a}{b}\right)^\gamma}$$

$$\Delta S_{41} = \frac{R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{b}{a}\right)^\gamma$$

$$\Delta S_{41} = -32\ J$$

$$\Delta S_{cycle} = 32 - 32$$

$$\Delta S_{cycle} = 0$$

8)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}} = 1 - \frac{22{,}81}{42{,}08}$$

$$\boxed{\eta = 45{,}8\,\%}$$

9)

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}}$$

$$= 1 + \frac{Q_{41}}{Q_{23}}$$

$$= 1 + \frac{\frac{R}{\gamma-1} \cdot T_1 \left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}\right)}{\frac{\gamma R}{\gamma - 1} a^{\gamma} T_1 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}}{\gamma a^{\gamma}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{a^{-\gamma}\left(1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{\gamma}\right)}{b^{-1} - a^{-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\gamma} \, \frac{a^{-\gamma} - b^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

$$= 1 - \frac{1}{\gamma} \, \frac{b^{-\gamma} - a^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}$$

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{1}{\gamma} \, \frac{b^{-\gamma} - a^{-\gamma}}{b^{-1} - a^{-1}}}$$